第 3 节 不等式的进阶方法（★★★）

强化训练

1．（★★）已知 $a>0$，则 $(a^2+3a+1)(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}+1)$ 的最小值为_____.

答案：25

解析：所给式子具有柯西不等式的结构特征，稍作变形即可用柯西不等式求出最小值，

由柯西不等式，$(a^2+3a+1)(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}+1)=[a^2+(\sqrt{3a})^2+1^2][(\frac{1}{a})^2+(\sqrt{\frac{3}{a}})^2+1^2]\geq(a\cdot\frac{1}{a}+\sqrt{3a}\cdot\sqrt{\frac{3}{a}}+1\times1)^2=25$，

取等条件是 $\frac{a}{\frac{1}{a}}=\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{\frac{3}{a}}}=\frac{1}{1}$，此时 $a=1$，所以 $(a^2+3a+1)(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}+1)$ 的最小值为 25.

2．（2021 • 浙江卷改编 • ★★★）已知实数 x，y，z 满足 $2x+y-\sqrt{5}z=2$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为_____.

答案：$\frac{2}{5}$

解析：求最值的目标涉及三项平方和，可考虑用三维形式的柯西不等式，需结合所给等式凑系数，

因为 $2x+y-\sqrt{5}z=2$，所以 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{10}[2^2+1^2+(-\sqrt{5})^2](x^2+y^2+z^2)\geq\frac{1}{10}(2x+y-\sqrt{5}z)^2=\frac{1}{10}\times2^2=\frac{2}{5}$，

《一数•高考数学核心方法》

取等条件是 $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-\sqrt{5}}$，结合 $2x+y-\sqrt{5}z=2$ 可得

$x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{1}{5}$，$z=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，故 $(x^2+y^2+z^2)_{\min}=\frac{2}{5}$.

3．（★★★）已知 $x>1$，$y>1$，$xy=10$，则 $\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}$ 的最小值是_____.

答案：9

解析：求两个分式和的最值，考虑权方和不等式，观察所给等式可发现分母之和恰为定值，可直接用，

由权方和不等式，$\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}=\frac{1^2}{\lg x}+\frac{2^2}{\lg y}\geq\frac{(1+2)^2}{\lg x+\lg y}=\frac{9}{\lg(xy)}=\frac{9}{\lg10}=9$，

取等条件是 $\frac{1}{\lg x}=\frac{2}{\lg y}$，结合 $xy=10$ 可得此时 $x=10^{\frac{1}{3}}$，$y=10^{\frac{2}{3}}$，所以 $\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}$ 的最小值为 9.

4．（★★★）已知 $a>0$，$b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{2}{b+1}$ 的最小值为_____.

答案：$\frac{9}{4}$

解析：求两个分式和的最值，考虑权方和不等式，为了凑出分母和为定值，将 $\frac{2}{b+1}$ 变成 $\frac{4}{2b+2}$，

由权方和不等式，$\frac{1}{2a}+\frac{2}{b+1}=\frac{1^2}{2a}+\frac{2^2}{2b+2}\ge\frac{(1+2)^2}{2a+2b+2}=\frac{9}{4}$，取等条件是$\frac{1}{2a}=\frac{2}{2b+2}$，

结合$a+b=1$可得此时$a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{1}{3}$，所以$\frac{1}{2a}+\frac{2}{b+1}$的最小值为$\frac{9}{4}$.

5.（2023•全国乙卷•★★★）已知实数x，y满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则$x-y$的最大值是（　　）

（A）$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　（B）4　　（C）$1+3\sqrt{2}$　　（D）7

答案：C

解析：条件可配方化为平方和结构，故考虑三角换元，

$x^2+y^2-4x-2y-4=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=9$，

令$\begin{cases}x=2+3\cos\theta\\y=1+3\sin\theta\end{cases}$，则$x-y=2+3\cos\theta-1-3\sin\theta=1-3\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$，$\theta\in\mathbf{R}$，

所以当$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=-1$时，$x-y$取得最大值$1+3\sqrt{2}$.

6.（2020•清华强基试题•★★★）若$x^2+y^2\le1$，则x^2+xy-y^2的取值范围为（　　）

（A）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　（D）$[-2,2]$

答案：C

解析：本题给的是平方和不等式，不是等式，也可用三角换元，多引入一个变量即可，

《一数•高考数学核心方法》

设$x^2+y^2=r^2$，则由$x^2+y^2\le1$可得$0\le r^2\le1$，利用三角换元，可设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，

则$x^2+xy-y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin\theta\cos\theta-r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta)$

$=r^2(\cos2\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta)=\frac{\sqrt{5}}{2}r^2\sin(2\theta+\varphi)$，

因为$-1\le\sin(2\theta+\varphi)\le1$，$0\le r^2\le1$，所以$-\frac{\sqrt{5}}{2}\le\frac{\sqrt{5}}{2}r^2\sin(2\theta+\varphi)\le\frac{\sqrt{5}}{2}$，故$-\frac{\sqrt{5}}{2}\le x^2+xy-y^2\le\frac{\sqrt{5}}{2}$.

7.（2022•新高考Ⅱ卷•★★★★）（多选）若实数x，y满足$x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

（A）$x+y\le1$　　（B）$x+y\ge-2$　　（C）$x^2+y^2\ge1$　　（D）$x^2+y^2\le2$

答案：BD

解法1：所给等式中有x^2，y^2，xy，可尝试将其配方，转化为平方和结构，用三角换元处理，

由$x^2+y^2-xy=1$可得$(x-\frac{y}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2=1$，所以可设$\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\theta\\\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta\end{cases}$，则$\begin{cases}x=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\\y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\end{cases}$，

所以$x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，从而$-2\le x+y\le2$，故A项错误，B项正确；

$x^2+y^2=(\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2+(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta+\frac{4}{3}\sin^2\theta$

$=1+\frac{2}{3}\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta=1+\frac{1-\cos 2\theta}{3}+\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})$，

因为 $-1\le\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})\le 1$，所以 $\frac{2}{3}\le x^2+y^2\le 2$，故 C 项错误，D 项正确.

解法 2：A、B 两项判断的是与 $x+y$ 有关的不等式，可由已知的等式凑出这一结构，先配方，

由题意，$1=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$，观察发现只需用 $xy\le(\frac{x+y}{2})^2$ 即可将结构统一成 $x+y$，

所以 $1=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-3(\frac{x+y}{2})^2=\frac{(x+y)^2}{4}$，从而 $-2\le x+y\le 2$，

当且仅当 $x=y$ 时取等号，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得 $x=y=-1$ 或 $x=y=1$，

它们分别对应上述左、右两侧的取等条件，所以 $x+y$ 的取值范围是 $[-2,2]$，故 A 项错误，B 项正确；

C、D 两项与 x^2+y^2 有关，还是考虑统一结构，要把 xy 变成 x^2+y^2，可用 $-\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$ 来实现，

一方面，$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $1=x^2+y^2-xy\ge x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$，故 $x^2+y^2\le 2$，

取等条件是 $x=y$，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得此时 $x=y=1$ 或 $x=y=-1$；

另一方面，$xy\ge-\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $1=x^2+y^2-xy\le x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{3}{2}(x^2+y^2)$，故 $x^2+y^2\ge\frac{2}{3}$，

取等条件是 $y=-x$，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得此时 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$；

《一数·高考数学核心方法》

所以 x^2+y^2 的取值范围是 $[\frac{2}{3},2]$，故 C 项错误，D 项正确.

【反思】①这是当年的选择压轴题，通过此题我们发现若给出 x，y 的二次齐次等式，可考虑通过配方化为平方和结构，再三角换元；②上述解法 2 用到了统一结构的思想，也是常规方法，其中用到的不等式 $-\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$ 源于 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，将 a 换成 x^2，b 换成 y^2 可得 $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\sqrt{x^2y^2}=|xy|$，去掉绝对值即得该不等式.